



## 教育部 103 學年度中小學科學教育專案期末報告大綱

計畫名稱：最少監視點與郵票問題的深入研究。

主持人：國立花蓮女中數學科教師吳仲奇

執行單位：國立東華大學教授、

國立花蓮女中數學教師與學生共 8 人

# 教育部 103 學年度中小學科學教育專案期末報告大綱

計畫名稱：最少監視點與郵票問題的深入研究。

主持人：國立花蓮女中數學科教師吳仲奇 E-mail:wu5255@yahoo.com.tw

執行單位：國立東華大學教授、國立花蓮女中數學教師與學生共 8 人

## 一、計畫執行摘要

1. 是否為延續性計畫？ 否
2. 執行重點項目：科學資賦優異學生教育研究及輔導
3. 辦理活動或習會等名稱：數理資優班數學科專題研究
4. 辦理活動或研習會對象：數理資優班專題研究數學組學生
5. 參加活動或研習會人數：8 人
6. 參加執行計畫人數：3 人
7. 辦理/執行成效：

## 二、計畫目的

1. 培養學生發掘問題並解決問題的能力：  
本計劃希望能藉由教授所題出的數學問題，讓學生發掘相關問題；並以數學方法，由定義符號，推導定理，找出解決方法。
2. 利用研究過程讓學生體會出數學定理的推導具生命力：  
丘成桐院士曾說：重要概念如何演進的過程充滿了”生命力”。  
藉由學生自行推導新定理，在推演的過程中，去體會數學的生命力。
3. 以數學方法解決生活應用問題：  
本研究課程以實際問題出發，利用數學方法，不僅要解決問題，而且要尋找出最佳解決方法，使實際問題的解決，所需之物力與人力最精簡。
4. 開發新的數學模型，解決複雜的問題：  
藉由研究過程，讓學生嘗試各種不同方式，以不同數學工具尋求解答，綜合所有研究內容，建構自己的解決模型。讓學生體會出找對最好的方向，便能很快入手。

### 三、 研究方法

#### 1. 在課程研發方面：

由計劃成員研討、擬定、撰寫課程計畫。

#### 2. 在訓練學生基本能力方面：

(1)除了增加學生高中課程內容的熟稔度，並加深加廣高中課程內容。

(2)提供歷屆科展優秀作品，與學生一同研究探討，並讓學生發掘其是否有其推廣性，或是否有更佳的研究方式。

(3)利用網路上之數學競試題，訓練學生思考與解題能力。

(4)帶領學生參與東華大學主辦的演講。

(5)帶領學生參與研習，並與畢業學姐進行經驗分享。

#### 3. 在訓練學生進階能力方面：

(1)以歷屆科展作品為題材，由教授指出各作品的優劣處，並引導學生思考如何改進。

(2)以歷屆科展作品為教材，訓練學生如何適切的定義符號。

(3)由教授提出問題，由學生集體研究如何解決。再以學生的研究結果為題材，說明其優劣處。

(4)帶領學生進入 Code block gcc version 下載國際限時計時數學競賽題參與競賽。

#### 4. 在專題研究規劃、辦理方面：

由教授提供多方面的題目，由學生共同決定主題、收集資料，規劃研究進程：

(1)東華大學教授每週 4 小時參與討論，適時提出學生研究方面的盲點與缺失。

(2)花蓮女中數學教師每週 3-5 小時參與學生的主題研究，瞭解研究內容與掌握

研究進度。

#### 四、研究成果：

- (1)由學生製作 ppt，解說研究之方法與結果。
- (2)由花蓮女中數學教師針對解說之內容提問。
- (3)由東華大學教授針對研究方法與結果提出缺失與改進意見。
- (4)針對研究者之提問與教授之建議，由學生繼續研究探討，並重新整理再製作 ppt，如此不斷重複上述過程。
- (5)由計劃成員研究評鑑的標準及方法，於課程結束時辦理成果發表，聘請學者專家擔任評鑑工作。
- (6)研究成果內容摘要

我們設定一監視器能有限制的監視其周圍各兩點，稱為**直線－距離－2**之控制集。接著以座標方式將問題數學模型化，推得 $m \times n$ 點陣之最少監視點數的範圍；並以 $6 \times 6$ 點陣為一單位循環點陣，導出 $m \times n$ 點陣之規律，再以數學程式檢驗監視點數之值是否符合我們所推導出之上、下界，最後以 $m \times n$ 點陣推算 $m \times n \times r$ 之三維空間模型，將二維及三維圖形做出比較與探究其關聯：

- i.在有限制的情形下，將道路理想化成為方正的矩形，如何以最少監視器監控到所有範圍，便可以降低成本。
- ii.設想有一透明立體展場，將此理想化為一正立方體，如何以最少監視器監控到所有範圍，便可以降低成本。
- iii.將監控範圍數學模型化，以座標方式簡單呈現。
- iv.也可以將此概念運用網路架設及紅外線感應式自動開關。

已推導出之研究結論：

- i. 平面之最少監視點數之確定與通解。

ii.立體之最少監視點數之規律與通解。

接著研究 **Stamping** 問題：

所謂「郵票問題」，就是現有  $n$  種面額的郵票，規定最多只能貼  $m$  張，試求其所能排出的最大連續正整數，並討論  $m$  和  $n$  之間的關係。而由郵票問題所衍生出的「IC 問題」則是假設今有一個擁有  $n$  個數的數列，求出此  $n$  個數所能排出的最大連續組合正整數數值，其與郵票問題的差別在於郵票問題在排出連續組合數時面額可以彼此不相連，而 IC 問題的面額卻要彼此相連組合才算是連續組合數，過去學者發表的論文上，最好的結果是其最大組合方式為  $1, 2, 3, 4, \dots, n-2, n-1, n$  所求出的最大值是  $\frac{n(n+1)}{2}$ ，但在  $n \geq 4$  時，

我們能求出的最大值會少於  $\frac{n(n+1)}{2}$  而欲排出此數列的最大連續數時數列中的某些數值會重複出現導致最大值少於最大組合方式之值，藉由數與數之間的排列關係以及程式驗證，來縮小直線、圓形以及俄羅斯方塊上下界的範圍，並研究其排列規律。

最少監視點的研究成果已於期中報告中提出，所以本次僅提出郵票問題的成果，如附件。

## 五、討論及建議

學生除了應付學校課業外，須在有限的時間內，完成既定研究進度，雖然辛苦，但學生對於自己的研究作品，充滿自信；在學生的規劃進度、分工合作、熱烈討論、解決問題中，我們看到了孩子們的認真、執著與成長！

東華大學教授的指導更讓學生獲得最大助力，但因經費不足，所以不夠支付教授們的指導鐘點，因此減少與教授共同專題研究的時間，若能有更多時間接受教授們學有專精的指導，孩子們必能有更佳的表现。

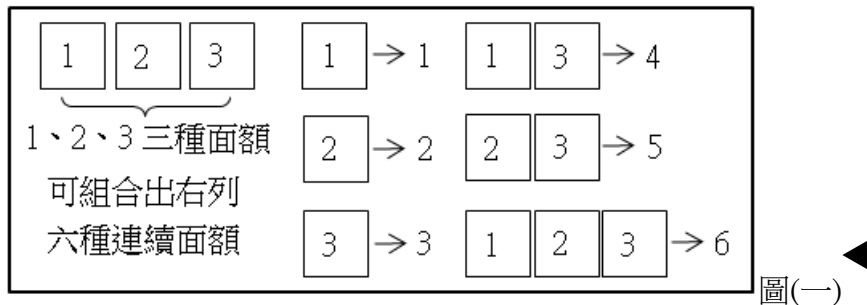
附件：

# The stamp covering problem of path

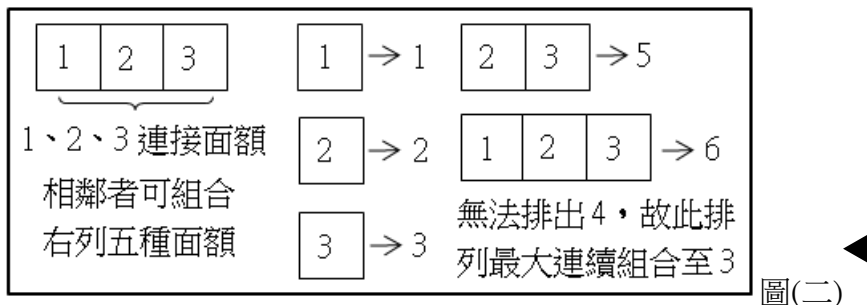
## 1 簡介

本次研究主要討論的是由一連串類似 IC 問題的推演進而衍生出的直線之郵票覆蓋數，即於直線圖形上取  $n$  個點並填入數字，求其所能形成的最大連續正整數。對於長度為  $n$  的直線圖，過去的研究所得 IC 數的最佳上界為  $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ ，但在  $n \geq 5$  時，欲排出此圖形的最大連續數時，直線圖形中的某些數值會重複出現，導致最大值少於無聊上界之值。

所謂郵票問題所探討的就是給定所取張數  $n$  及  $m$  種面額，並使其組合出從 1 開始的連續正整數，探討其所能達到的最大值。如圖(一)所示。進一步探討與其相似的圖形所形成的「直線 IC 著色」，即於直線圖形上給定  $n$  格格數，於其中填入不超過格數之正整數，不相鄰者不能組合，如圖(二)所示。簡單來說，郵票問題是一種任意兩頂點間彼此相連的 IC 著色，而我們主要探討的則是直線的 IC 著色及變形後的 IC 著色。



圖(一)



圖(二)

設  $G$  是一個圖， $M(G)$  是  $G$  的郵票覆蓋數， $M'(G)$  是  $G$  的 IC 數(定義詳見第二節，名詞釋義)，主要的研究結果是改進了直線圖的上下界。

對於長度為  $n$  的直線圖  $P_n$ ，過去最好的結果是：

$$\text{定理. } \frac{n^2+6n-4}{4} \leq M'(P_n) \leq M(P_n) \leq \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

(參見 Penrice (1995) 及 Ebrahim Salehi, Sin-Min Lee, Mahdad Khatirinejad (2005) 的結果)

而我們得到的結果為

$$\text{定理. } \frac{n^2+8n-8}{4} \leq M'(P_n) \leq M(P_n) \leq \frac{n(n+1)}{2} - 3 \quad (\text{當 } n \geq 5 \text{ 時})。$$

事實上，綜合我們的各種證明方法，當  $n \geq 6$  時，可以進一步將  $M'(P_n)$  的上界降低到  $\frac{n(n+1)}{2} - 3$

接著我們推導出對於長度為  $n_c$  的圓圈  $C_n$ ：

$$\text{定理. 當 } 7 \geq n \text{ 時， } 6n_c - 11 \leq M(C_n) \leq n_c(n_c - 1) + 1；$$

$$\text{當 } n \geq 7 \text{ 時， } \frac{n_c^2+2n_c-1}{2} \leq M(C_n) \leq n_c(n_c - 1) + 1。$$

## 2 基本圖論與名詞定義

**定義 1.** 給定一個圖  $G$ ，圖上的一種**著色(coloring)**，就相當於分配正整數至任意圖上之頂點。也就是說，圖  $G$  的一個著色可以視為一個由頂點  $V(G)$  到正整數的函數  $f$ 。

**定義 2.** 對於  $G$  的一個子圖  $H$  及  $G$  的一種著色  $f$ ，定義

$$f_s(H) = \sum_{v \in V(H)} f(v)$$

於 1992 年 Glenn Chappel 曾研究一個 "subgraph sums" 問題，這個問題在 2005 年時在 Ebrahim Salehi, Sin-Min Lee, Mahdad Khatirinejad 的論文中被稱為 IC-著色問題。

**定義 3.** 給定一個圖  $G$  及著色  $f$ ，如果對於所有小於等於  $f_s(G)$  的正整數  $k$ ，都可以找到一個  $G$  的連通子圖  $H$  使得  $f_s(H) = k$ ，則我們稱  $f$  為  $G$  的 IC-著色。定義 IC-數  $M'(G) = \max\{f_s(H) | f \text{ 是 IC 著色}\}$

1995 年 Penrice 介紹的郵票覆蓋(stamp covering)的概念如下：給定圖  $G$ 、著色  $f$  及正整數  $K$ ，如果對於每個小於等於  $K$  的正整數  $k$  都存在一個  $G$  的連通子圖  $H$ ，使得  $f_s(H) = k$ ，則稱  $f$  是  $G$  的一個 **K-標籤(K-labeling)**。(詳見[2])

**定義 4.** 如果  $f$  是 IC-著色也就是  $f$  是  $f_s(G)$ -標籤的意思。定義**郵票覆蓋數(stamp covering number)**  $M(G)$  為在圖  $G$  上存在  $K$ -標籤的最大整數  $K$ 。

此篇報告主要是在研究直線的郵票覆蓋數，而郵票覆蓋數與 IC 數最大的不

同在於 IC 數其頂點內數字總和必須等於所有數字總和，而郵票覆蓋數則無此限制，使組合數盡可能的大即可。

### 3 直線圖之上界

定義名詞：

$P_n$ : 長度為  $n$  的直線圖

$S$ : 直線上所有數字的總和，即  $f_s(P_n)$ .

因為主要研究的對象是直線圖形，我們簡化符號令  $M(n) = M(P_n)$  而  $M'(n) = M'(P_n)$ 。

$n$  較小時，可用電腦程式求出  $M(n)$  和  $M'(n)$ ， $n$  比較大時求出其上下界，且盡可能得到較大下界與較小上界，以逼近  $M(n)$  和  $M'(n)$

**定理 1.** 直線圖明顯上界為  $M(n) \leq \frac{n(n+1)}{2}$ 。

**證明.** 在  $P_n$  中長度為 1 的連通子圖有  $n$  個，從左到右標為  $H_{(1,1)}, H_{(1,2)}, \dots, H_{(1,n)}$ 。

在  $P_n$  中長度為 2 的連通子圖有  $n-1$  個，從左到右標為

$H_{(2,1)}, H_{(2,2)}, \dots, H_{(2,n-1)}$ 。

依此類推，總共有  $n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$  個連通子圖，

所以至多有  $\frac{n(n+1)}{2}$  個著色數，因此  $M(n) \leq \frac{n(n+1)}{2}$ 。

**定理 2.**  $M(n) \leq \frac{n(n+1)}{2} - 1 \quad (n \geq 4)$

**證明.** 假設  $M(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ ，則  $\frac{n(n+1)}{2}$  個連通子圖之著色數均相異，特別的，

$f_s(H_{(1,1)}), \dots, f_s(H_{(1,n)})$  均相異。將其由小至大排列分別大於或等於  $1, 2, 3, \dots, n$ 。因

$$\text{此 } \frac{n(n+1)}{2} = f_s(P_n) = \sum_{i=1}^n f_s(H_{(1,i)}) \geq 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

所以  $\{f_s(H_{(1,1)}), \dots, f_s(H_{(1,n)})\} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 。

接著考慮  $H_{(2,1)}, H_{(2,2)}, \dots, H_{(2,n-1)}$ ，顯然  $f_s(H_{(2,i)}) \leq n + (n-1) = 2n-1$ 。



又  $f_s(H_{(2,i)}) \neq f_s(H_{(1,j)})$ , 對於任意  $i, j$ , 所以  $f_s(H_{(2,i)}) \geq n+1$ 。

所以  $\{f_s(H_{(2,1)}), \dots, f_s(H_{(2,n-1)})\} = \{n+1, n+2, \dots, 2n-1\}$ 。

如果  $f_s(H_{(2,j)}) = 2n-1$ , 則  $H_{(2,j)}$  之著色分別為  $n, n-1$ , 首先假設

$f(j) = n, f(j+1) = n-1$ , 因為有一長度 2 之連通子圖之著色數為  $2n-2$ , 則必然有  $f(j-1) = n-2$ , 又有一長度 2 之連通子圖之著色數為  $2n-3$ ,  $2n-3 = n+(n-3)$  或  $2n-3 = (n-1)+(n-2)$ , 但這兩種情況均不可能是長度 2 之連通子圖之著色數, 故矛盾。

若假設  $f(j+1) = n, f(j) = n-1$ , 則類似證明也可推得矛盾。

□

**定理 3.**  $M(n) \leq \frac{n(n+1)}{2} - 2$

**證明.** 若  $M(n) = \frac{n(n+1)}{2} - 1$ , 則所有連通子圖中恰有兩個相異連通子圖有相同之著色數。

(1) 若所有長度 1 之子圖著色數均相異, 則著色數由小至大分別大於等於

$1, 2, 3, \dots, n$ , 因此

$$f_s(G) = \sum_{i=1}^n f_s(H_{(1,i)}) \geq 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

與  $f_s(G) = \frac{n(n+1)}{2} - 1$  不合。所以恰有兩個長度 1 之子圖有相同著色數,

亦即  $f_s(H_{(1,k)}) = f_s(H_{(1,\ell)}), 1 \leq k < \ell \leq n$ ; 且其他連通子圖之著色數均

相異。所以總共有  $\frac{n(n+1)}{2}$  個連通子圖, 有  $\frac{n(n+1)}{2} - 1$  個相異著色數。設

$a = f_s(H_{(1,k)})$ 。

由於  $M(n) = \frac{n(n+1)}{2} - 1$ , 因此

$$\{f_s(H_{(1,1)}), \dots, f_s(H_{(n,1)})\} = \{1, 2, 3, \dots, \frac{n(n+1)}{2} - 1\}$$

(2) 如果  $k+1 \neq \ell$ , 則考慮  $\Gamma_1$  為從  $k$  到  $\ell-1$  的連通子圖, 考慮  $\Gamma_2$  為從  $k+1$  到  $\ell$  的連通子圖, 則  $f_s(\Gamma_1) = f_s(\Gamma_2)$ , 矛盾。所以  $\ell = k+1$ 。

- (3) 以  $S_1$  代表長度為 1 的子圖的著色數所成之及合， $S_2$  代表長度為 2 的子圖著色數所成之及合，則  $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ 。
- (4) 若  $a=n-1$ ，則  $S_1 = \{1, 2, \dots, n-1\}$ ，則  $\forall x \in S_2$ ， $n \leq x \leq 2n-2$ ，所以  $S_2 \subset \{n, n+1, \dots, 2n-2\}$ 。但是  $S_2$  共  $n-1$  個元素所以  $S_2 = \{n, n+1, \dots, 2n-2\}$ 。假設  $f(j)=f(j+1)=n-1$ ， $f_k(H_{2,j})=2n-2$ ， $2n-3 \in S_2$  所以  $f(j-1)=n-2$  或  $f(j+2)=n-2$ ，可假設  $f(j-1)=n-2$ 。 $2n-4 \in S_2$  所以  $f(j+1)=n-3$ 。如此一來利用  $2n-5 \in S_2$  得到矛盾。
- (5) 若  $k=n-2$ ，則  $f(1), f(2), \dots, f(n)$  由小到大分別為  $1, 2, 3, \dots, n-2, n-2, n$ 。因為  $\forall x \in S_2$ ， $n-1 \leq x \leq 2n-2$ ，則  $S_2 = \{n-1, n+1, \dots, 2n-2\}$ 。設  $f(j)=f(j+1)=n-2$ 。因為  $2n-2 \in S_2$  所以可假設  $f(j+2)=n$ ，因為  $2n-3 \in S_2$  所以  $f(j+3)=n-3$ 。由於  $2n-5 \in S_2$  即得到矛盾。
- (6) 若  $k=n-3$  且  $S_1 = \{1, 2, 3, \dots, n-3, n-3, n-1, n\}$ 。因為  $\forall x \in S_2$ ， $n-2 \leq x \leq 2n-1$ ，所以  $S_2 \subset \{n-2, n+1, \dots, 2n-1\}$ 。因為  $2n-2$  不屬於  $S_2$  所以得到  $S_2 = \{n-2, n+1, \dots, 2n-3, 2n-1\}$ 。因為  $2n-3 \in S_2$  所以  $f(j+2)=n$ ，又因為  $2n-1 \in S_2$  所以  $f(j+3)=n-1$ 。由於  $2n-4 \in S_2$  即得到矛盾。
- (7) 若  $k=n-3$  且  $S_1 = \{1, 2, 3, \dots, n-3, n-3, n-2, n+1\}$ 。因為  $\forall x \in S_2$ ， $n-1 \leq x \leq 2n-1$ ，所以  $S_2 \subset \{n-1, n, n+2, \dots, 2n-1\}$ ，且兩個集合間相差一個元素。如果  $2n-1$  不屬於  $S_2$  則  $2n-2, 2n-3, 2n-4 \in S_2$  可以得到矛盾。如果  $2n-1 \in S_2$  假設  $f(t)=n+1, f(t+1)=n-2$ 。則考慮  $2n-2, 2n-3, 2n-4$  至屬於多只有一個元素不屬於  $S_2$  可以得到矛盾。
- (8) 持續類似的討論繼續往下做，每種情況均可以得到矛盾。但是我們還無法給出一個完全完整的證明。
- (9) 教授提供以下的證明：

將  $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n)$  由小到大記為  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ 。令  $T_1 = \{1, 2, \dots, f_n\}$ ，則  $S_1 \subset T_1$ ，

令  $T_2 = \{f_n + 1, f_n + 2, \dots, f_n + f_{n-1}\}$ ，則  $S_1 \cup S_2 \subset T_1 \cup T_2$ 。依此類推可以定義  $T_k$  滿足  $S_1 \cup \dots \cup S_k \subset T_1 \cup \dots \cup T_k$ 。且

$$S_1 \cup \dots \cup S_n = T_1 \cup \dots \cup T_n = \{1, 2, \dots, s\},$$

其中  $s = \frac{n(n+1)}{2} - 1$ 。

可以證明

$$S_1 \cup \dots \cup S_{n-1} = T_1 \cup \dots \cup T_{n-1} = \{1, 2, \dots, s-1\};$$

$$S_1 \cup \dots \cup S_{n-2} = T_1 \cup \dots \cup T_{n-2} = \{1, 2, \dots, s-3\};$$

$$S_1 \cup \dots \cup S_{n-3} = T_1 \cup \dots \cup T_{n-3} = \{1, 2, \dots, s-6\}.$$

所以  $S_n = \{s\}$ ,  $S_{n-1} = \{s-1, s-2\}$ ,  $S_{n-2} = \{s-3, s-4, s-5\}$ 。

由於  $S_n = \{s\}$ ,  $S_{n-1} = \{s-1, s-2\}$ ，可以假設  $f(1)=1, f(n)=2, f(2)=x, f(n-1)=y$ 。令  $A=f(3)+\dots+f(n-2)$ 。則  $A+x+y=s-3$ ;  $\{A+x+1, A+y+2\}=\{s-4, s-5\}$ 。

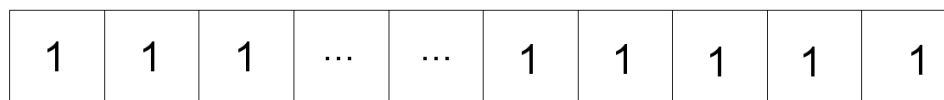
因此  $x=3, y=3$  (矛盾) 或是  $x=4, y=2$ 。如果  $x=4, y=2$  則  $s=6$  不屬於  $S_{n-3}$ (矛盾)，故得證。

□

## 4 直線圖之下界

定理 1. 直線明顯下界是  $n$

證明. 當格數= $n$ ，著色方式為  $f_1=(1,1,1,1,\dots,1)$ ，如圖(三)



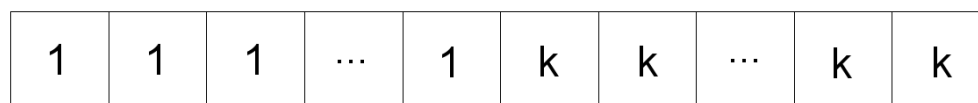
n 格

▲ 圖(三)

由圖觀察，可取  $n$  個 1 所形成的連通子圖  $H_n$

定理 2.  $m(n) \geq \lceil \frac{n^2+4n}{4} \rceil$

證明. 著色方式為利用一正整數  $k$  與 1 組合著色，由  $k-1$  個 1 與  $n-k+1$  個  $k$  排出之  $f_2$ ，如圖(四)



n 格

▲ 圖(四)

由圖觀察，

當  $n \leq k+1$  時，可以取相鄰  $n$  個 1 所形成的連通子圖；

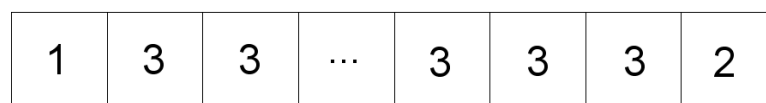
當  $n=tk$  時，可以取相鄰  $t$  個  $k$  所形成的連通子圖；

當  $n=tk+s$  時，可以取相鄰  $t$  個  $k$  加上與其相鄰的  $s$  個 1 所形成的連通子圖，其中  $t \leq n-k+1, s \leq k-1$ 。

當  $n$  是奇數時取  $k=n+1/2$ ，當  $n$  是偶數時取  $k=n+2/2$  即得證。

定理 3.  $2 < n < 6$  時， $m(n) \geq 3n - 3$

證明. 著色方式為  $f_3=(1,3,3,3,\dots,3,3,3,2)$ ，如圖(五)



n 格

▲ 圖(五)

由圖觀察，

當  $n \leq 2$  時，可以取  $n$  所形成的連通子圖  $H_{n1}$ ；

當  $n=3k$  時，可以取相鄰  $k$  個 3 所形成的連通子圖  $H_{n2}$ ；

當  $n=3k+1$  時，可以取相鄰  $k$  個 3 加上與其相鄰的 1 個 1 所形成的連通子圖  $H_{n3}$ ；

當  $n=3k+2$  時，可以取相鄰  $k$  個 3 加上與其相鄰的 1 個 2 所形成的連通子圖  $H_{n4}$ ；

又當  $2 < n < 6$  時， $f_3$  所排出的最大連續組合數會比  $f_2$  還要來的大，故在此範圍內， $f_3$  排法可以作為直線的下界。

**定理 4.**  $8 < n < 18$  時， $m(n) \geq 7n - 27$

**證明.** 著色方式為  $f_4 = (1, 2, 3, 7, 7, \dots, 7, 7, 4, 4, 1)$ ，如圖(六)

1	2	3	7	7	...	7	4	4	1
---	---	---	---	---	-----	---	---	---	---

n 格

▲ 圖(六)

由圖觀察，

當  $n \leq 4$  時，可以取  $n$  所形成的連通子圖  $H_{n1}$ ；

當  $n=5$  時，可以取 1 個 1 及與 1 相鄰的 1 個 4 所形成的連通子圖  $H_{n2}$ ；

當  $n=6$  時，可以取相鄰的 1 個 1, 1 個 2 及 1 個 3 所形成的連通子圖  $H_{n3}$ ；

當  $n=7k$  時，可以取相鄰  $k$  個 7 所形成的連通子圖  $H_{n4}$ ；

當  $n=7k+1$  時，可以取相鄰  $k-1$  個 7 加上與其相鄰的 2 個 4 所形成的連通子圖  $H_{n5}$ ；

當  $n=7k+2$  時，可以取相鄰  $k-1$  個 7 加上與其相鄰的 2 個 4 及 1 個 1 所形成的連通子圖  $H_{n6}$ ；

當  $n=7k+3$  時，可以取相鄰  $k$  個 1 加上與其相鄰的 1 個 3 所形成的連通子圖  $H_{n7}$ ；

當  $n=7k+4, 7k+5, 7k+6$  時，可以取相鄰  $k$  個 7 再分別加上連通子圖  $H_{n1}, H_{n2}, H_{n3}$ ；

又當  $6 < n < 18$  時， $f_4$  排出的最大連續組合數會比  $f_2$  還要來的大，不過當  $n = 8$  時此著色為其連續最大組合，而在  $n=9$  時最大連續組合數值已不是此著色，故在  $8 < n < 18$  範圍內， $f_4$  排法可以作為下界的最大值。

先前於文獻資料 IC-COLORINGS AND IC-INDICES OF GRAPHS(詳見[2])中有一組排法為  $(1, 1, \dots, 1, k+1, k+1, \dots, k+1, k-1)$ ，如圖(七)

1	1	1	...	1	k+1	k+1	...	k+1	k
---	---	---	-----	---	-----	-----	-----	-----	---

n 格

▲ 圖(七)

當  $n \leq k-1$  時，可以取相鄰  $n$  個 1 所形成的連通子圖  $H_{n1}$ ；

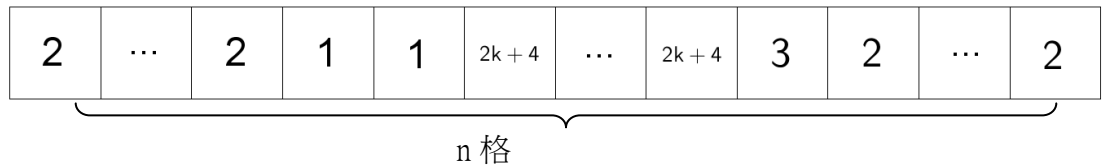
當  $n=k$  或  $k+1$  時，可以取  $n$  所形成的連通子圖  $H_{n2}$ ；

當  $n=t(k+1)+s$  時，可以取相鄰  $t$  個 1 加上與其相連的  $t$  個  $k+1$  所形成的連通子圖  $H_{n3}$ ，其中  $s \leq k-1, t \leq n-k$ ；

當  $n=t(k+1)+k$  時，可以取相鄰  $t$  個  $k+1$  加上與其相連的  $k$  所形成的連通子圖  $H_{n4}$ ，其中  $t \leq n-k$ 。

定理 5.  $m(n) \cong \lfloor \frac{n^2+6n-3}{4} \rfloor$

證明. (1)如圖(八), 著色方式為前面  $k$  個 2 後面接兩個 1, 中間有  $n-2k-3$  個  $2k+4$ , 後面再接著一個 3 及  $k$  個 2



▲ 圖(八)

由圖觀察，

當  $n \leq 3$  時，可以取  $n$  所形成的連通子圖  $H_{n1}$ ；

當  $n=2k$  時，可以取相鄰  $k$  個 2 所形成的連通子圖  $H_{n2}$ ；

當  $n=2k+1$  時，可以取相鄰  $k$  個 2 加上與其相鄰 1 個 1 所形成的連通子圖  $H_{n3}$ ；

當  $n=2k+2$  時，可以取相鄰  $k$  個 2 加上與其相鄰 2 個 1 所形成的連通子圖  $H_{n4}$ ；

當  $n=2k+3$  時，可以取相鄰  $k$  個 2 加上與其相鄰 1 個 3 所形成的連通子圖  $H_{n5}$ ；

當  $n=t(2k+4)$  時，可以取相鄰  $t$  個  $2k+4$  所形成的連通子圖  $H_{n6}$ ；

當  $n=t(2k+4)+1$  時，可以取相鄰  $t$  個  $2k+4$  加上與其相鄰 1 個 1 所形成的連通子圖  $H_{n7}$ ；

當  $n=t(2k+4)+2$  時，可以取相鄰  $t$  個  $2k+4$  加上與其相鄰 2 個 1 所形成的連通子圖  $H_{n8}$ ；

當  $n=t(2k+4)+3$  時，可以取相鄰  $t$  個  $2k+4$  加上與其相鄰 1 個 3 所形成的連通子圖  $H_{n9}$ ；

當  $n=t(2k+4)+2k+2$  時，可以取相鄰  $t$  個  $2k+4$  加上  $H_{n4}$  所形成的連通子圖  $H_{n10}$ ；

當  $n=t(2k+4)+2k+3$  時，可以取相鄰  $t$  個  $2k+4$  加上  $H_{n5}$  所形成的連通子圖  $H_{n11}$ ；

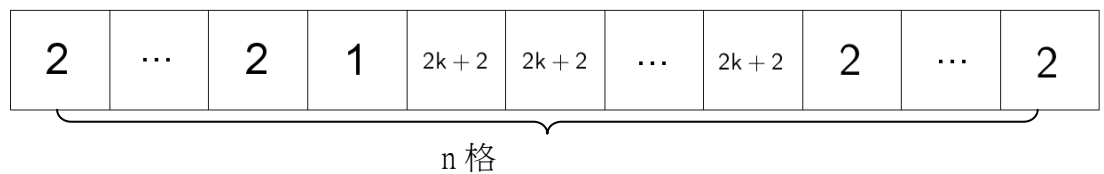
當  $n = (n-2k-3)(2k+4) + (2k+3) + 1$  時，可以取相鄰  $n-2k-3$  個  $2k+4$  加上  $H_{n4}$  及與其相鄰的 1 個 1 所形成的連通子圖  $H_{n12}$ ；

當  $n = (n-2k-3)(2k+4) + (2k+3) + 2$  時，可以取相鄰  $n-2k-3$  個  $2k+4$  加上  $H_{n5}$  及與其相鄰的 2 個 1 所形成的連通子圖  $H_{n13}$ ；

當  $n = (n-2k-3)(2k+4) + (2k+3) + 2k + 1$  時，可以取  $n-2k-3$  個  $2k+4$  加上  $H_{n4}$  及  $H_{n3}$  所形成的連通子圖  $H_{n10}$ ；

當  $n = (n-2k-3)(2k+4) + (2k+3) + 2k + 2$  時，可以取  $n-2k-3$  個  $2k+4$  加上  $H_{n5}$  及  $H_{n4}$  所形成的連通子圖  $H_{n11}$ ；

(2)如圖(九)，著色方式為前面  $k$  個 2 後面接一個 1，中間有  $n - 2k - 1$  個  $2k + 2$ ，後面再接著  $k$  個 2



▲ 圖(九)

由圖觀察，

當  $n \leq 2$  時，可以取  $n$  所形成的連通子圖  $H_{n1}$

當  $n = 2k$  時，可以取相鄰  $k$  個 2 所形成的連通子圖  $H_{n2}$

當  $n = 2k + 1$  時，可以取相鄰  $k$  個 2 加上與其相鄰 1 個 1 所形成的連通子圖  $H_{n3}$

當  $n = t(2k + 2)$  時，可以取相鄰  $t$  個  $2k + 2$  所形成的連通子圖  $H_{n4}$

當  $n = t(2k + 2) + 1$  時，可以取相鄰  $t$  個  $2k + 2$  加上與其相鄰 1 個 1 所形成的連通子圖  $H_{n5}$

當  $n = t(2k + 2) + 2k$  時，可以取相鄰  $t$  個  $2k + 2$  加上與其相鄰  $k$  個 2 所形成的連通子圖  $H_{n6}$

當  $n = t(2k + 2) + 2k + 1$  時，可以取相鄰  $t$  個  $2k + 2$  加上  $H_{n3}$  所形成的連通子圖  $H_{n7}$

當  $n = t(2k + 4) + 2$  時，可以取相鄰  $t$  個  $2k + 4$  加上與其相鄰 2 個 1 所形成的連通子圖  $H_{n8}$

當  $n = t(2k + 4) + 3$  時，可以取相鄰  $t$  個  $2k + 4$  加上與其相鄰 1 個 3 所形成的連通子圖  $H_{n9}$

當  $n = t(2k + 4) + 2k + 2$  時，可以取相鄰  $t$  個  $2k + 4$  加上  $H_{n4}$  所形成的連通子圖  $H_{n10}$

當  $n = t(2k + 4) + 2k + 3$  時，可以取相鄰  $t$  個 2 加上  $H_{n5}$  所形成的連通子圖  $H_{n11}$

定理 6.  $m(n) \cong \left\lceil \frac{n^2 + 6n + 13}{4} \right\rceil$

證明. 如圖(十)，著色方式為前面一個 1 和一個 2 後面接 k 個 1 及一個 3，中間有  $n-k-6$  個  $k+7$ ，後面再接著一個  $k+4$ 、一個 4 及一個 1

1	2	1	...	1	3	$k+7$	...	$k+7$	$k+4$	4	1
---	---	---	-----	---	---	-------	-----	-------	-------	---	---

n 格

▲圖(十)

由圖觀察，

當  $n \leq 4$  時，可以取  $n$  所形成的連通子圖  $H_{n1}$ ；

當  $n=k$  時，可以取相鄰  $k$  個 1 所形成的連通子圖  $H_{n2}$ ；

當  $n=k+1$  時，可以取  $k-2$  個 1 加上與其相鄰的 1 個 2 及 1 個 1 所形成的連通子圖  $H_{n3}$ ；

當  $n=k+2$  時，可以取相鄰  $k$  個 1 加上與其相鄰的 1 個 2 所形成的連通子圖  $H_{n4}$ ；

當  $n=k+3$  時，可以取相鄰  $k$  個 1 加上與其相鄰 1 個 3 所形成的連通子圖  $H_{n5}$ ；

當  $n=k+4$  時，可以取 1 個  $k+4$  所形成的連通子圖  $H_{n6}$ ；

當  $n=k+5$  時，可以取  $k$  個 1 加上與其相鄰的 1 個 2 及 1 個 3 所形成的連通子圖  $H_{n7}$ ；

當  $n=k+6$  時，可以取  $k$  個 1 加上與其相鄰 1 個 1 以及 1 個 2 以及 1 個 3 所形成的連通子圖  $H_{n8}$ ；

當  $n=t(k+7)$  時，可以取相鄰  $t$  個  $k+7$  所形成的連通子圖  $H_{n9}$ ；

當  $n=k+8$  時，可以取 1 個  $k+4$  加上 1 個 4 所形成的連通子圖  $H_{n10}$ ；

當  $n=k+9$  時，可以取 1 個  $k+4$  加上與其相鄰的 1 個 4 及 1 個 1 所形成的連通子圖  $H_{n11}$ ；

當  $n=t(k+7)$  時，可以取相鄰  $t$  個  $k+7$  所形成的連通子圖  $H_{n12}$ ；

當  $n=k+8$  時，可以取 1 個  $k+4$  加上與其相鄰的 1 個 4 所形成的連通子圖  $H_{n13}$ ；

當  $n=k+9$  時，可以取 1 個  $k+4$  加上與其相鄰的 1 個 4 及 1 個 1 所形成的連通子圖  $H_{n14}$ ；

當  $n=t(k+7)+k+2$  時，可以取相鄰  $t$  個  $k+7$  加上與其相鄰的 1 個 3 及  $k-1$  個 1 所形成的連通子圖  $H_{n15}$ ；

當  $n=t(k+7)+k+5$  時，可以取相鄰 1 個  $k+7$  加上  $H_{n7}$  所形成的連通子圖  $H_{n16}$ ；

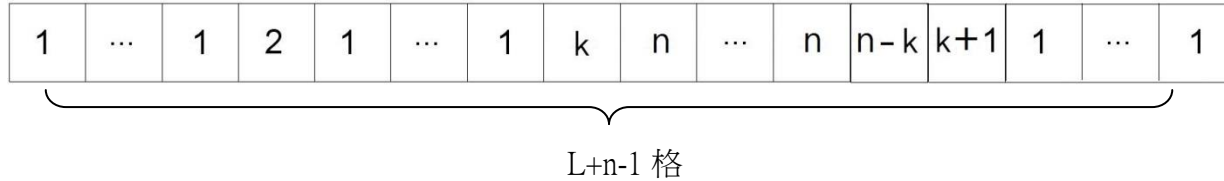
當  $n=t(k+7)+k+6$  時，可以取相鄰 1 個  $k+7$  加上  $H_{n8}$  所形成的連通子圖  $H_{n17}$ ；

由上述討論可得  $\frac{n^2+6n+13}{4} \leq M'(n) \leq M(n) \leq \frac{n(n+1)}{2} - 2$ 。接著將格數改為  $N$ ，而

$N=L+n-1$ ，討論格數夠大時的最大下界，而  $L$  及  $n$  為變數

定理 7.  $m(n) \cong \lceil \frac{N^2 + 6N + 13}{4} \rceil$

證明. 如圖(十一), 著色方式為前面有  $k-2$  個 1, 一個 2,  $n-2k-1$  個 1, 一個  $k$ ,  $L$  個  $n$ , 一個  $n-k$ , 一個  $k+1$ ,  $k-2$  個 1, 長度為  $L+n-1$



▲ 圖(十一)

由此著色方式所排出的最小值：

令  $L, n$  為固定的正整數

$$k - 2 + 2 + n - 2k - 1 + k + Ln + n - k + k + 1 + k - 2 = k + (L + 2)n - 2$$

由此可得知上式為  $k$  的一個斜率為正的線性函數, 所以  $k$  越大越好。

但  $k > 2, n - 2k - 1 > 0$  所以  $k < \frac{n-1}{2}$  所以  $k$  取 3。

同理將  $k=3$  代入上式  $3+(L+2)n-2=(L+2)n+1$ ,  $L, n$  互為斜率為彼此的線性函數, 故  $L, n$  皆越大越好。

由此可知, 目前最大的下界值為, 當長度(令  $N$ )為  $L+n-1$  時, 總和為

$$(L + 2)n + 1 = (N - n + 1 + 2)n + 1 = -\left(n - \frac{N + 3}{2}\right)^2 + \frac{N^2 + 6N + 13}{4}$$

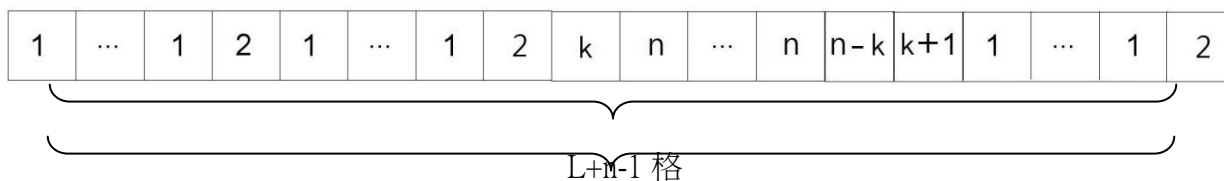
故當  $n = \frac{N+3}{2}$  時,  $m(n) = \frac{N^2 + 6N + 13}{4}$ 。

當  $n$  為偶數時, 與之最接近正整數為  $k = \frac{N+5}{2}$ ,  $\frac{N+1}{2}$  時,  $m(n) = \lceil \frac{N^2 + 6N + 13}{4} \rceil$

因此當格數為  $N$  時, 任何介於 1 到  $\frac{N^2 + 6N + 13}{4}$  的數都可被寫出來。

定理 8.  $m(n) \cong \lceil \frac{N^2 + 6N + 21}{4} \rceil$

證明. 如圖(十二), 著色方式為前面有  $k-2$  個 1, 一個 2,  $n-2k-3$  個 1, 一個 2, 一個  $k$ ,  $L$  個  $n$ , 一個  $n-k$ , 一個  $k+1$ ,  $k-2$  個 1, 一個 2, 長度為  $L+n-1$



▲ 圖(十二)

由此著色方式所排出的最小值：



令  $L, n$  為固定的正整數

$k - 2 + 2 + n - 2k - 3 + 2 + k + Ln + n - k + k + 1 + k - 2 + 2 = k + (L + 2)n$   
 由此可得知上式為  $k$  的一個斜率為正的線性函數，所以  $k$  越大越好

但  $k > 2, n - 2k - 3 > 0 \therefore k < \frac{n-3}{2} \therefore k$  取 3。

同理將  $k=3$  代入上式可得  $3+Ln$

$L, n$  互為斜率為彼此的線性函數，故  $L, n$  皆越大越好

由此可知，目前最大的下界值為，當長度(令  $N$ )為  $L+n-1$  時，總和為

$$(L + 2)n + 3 = (N - n + 1 + 2)n + 3 = -\left(n - \frac{N + 3}{2}\right)^2 + \frac{N^2 + 6N + 21}{4}$$

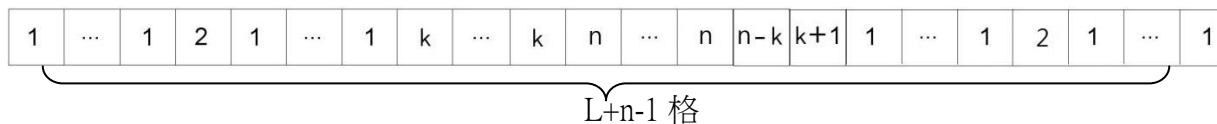
故當  $n = \frac{N+3}{2}$  時， $m(n) = \frac{N^2 + 6N + 21}{4}$

當  $n$ =偶數時，與之最接近正整數為  $k = \frac{N+5}{2}$ ， $\frac{N+1}{2}$  時， $m(n) = \lfloor \frac{N^2 + 6N + 21}{4} \rfloor$

因此當格數為  $N$  時，任何介於 1 到  $\frac{N^2 + 6N + 21}{4}$  的數都可被寫出來。

**定理 9.**  $m(n) \geq \lfloor \frac{N^2 + 8N - 8}{4} \rfloor$

**證明.** 如圖(十三)，著色方式為  $k-2$  個 1，一個 2， $T$  個 1， $M+1$  個  $k$ ， $L$  個  $n$ ，一個  $n-k$ ，一個  $k+1$ ， $M$  個 [ $k-2$  個 1 和一個 2] 與  $k-2$  個 1，長度為  $L+n-1$



▲ 圖(十三)

由此著色方式所排出的最小值：

令  $L, n, k$  為固定的正整數

$$k - 2 + 2 + T + (M + 1)k + nL + n - k + k + 1 + M(k - 2 + 2) + k - 2 = (2k)M + nL + n + T + 3k - 1$$

.....(1)

又已知  $k-2+1+T+M+1+1+1+M(k-2+1)+k-2=n-1 \therefore T=n-2k-kM-1>0$

可得知  $M < \frac{n-2k-1}{k}$ ， $M = \lfloor \frac{n-2k-1}{k} \rfloor$  代入(1)式得：總和  $= (k)M + 2n + nL + k - 2$

由此可得知  $M$  為一個斜率為正的線性函數，故  $M$  值越大結果越好。

令  $L, n$  為固定的正整數， $M = \frac{n-1}{k} - 2 - d$ ，其中  $1 > d \geq 0$ 。代入(1)式可得： $(-1-d)k + 3n + nL - 2$ 。由此可以得知  $k$  值越小越好，但  $k > 2$ ，故  $k$  取 3 為最佳解

令  $L$  為固定的正整數， $M = \frac{n-1}{k} - 2 - d$ ，其中  $1 > d \geq 0$ ， $k=3$

代入(1)式得： $(L+3)n - 3d - 5$ 。由此可以得知  $n$  值越大越好，同理， $L$  值亦越大越好。

由此可知，目前最大的下界值為，當長度(令  $N$ )為  $L+n-1$  時，總和為

$$(L+3)n - 6 = (N - n + 1 + 3)n - 6 = -\left(n - \frac{N+4}{2}\right)^2 + \frac{N^2 + 8N - 8}{4}。$$

故當  $n = \frac{N+4}{2}$  時， $m(n) = \frac{N^2 + 8N - 8}{4}$ 。當  $n$  為奇數時，與之最接近正整數為

$n = \frac{N+3}{2}$ ， $\frac{N+5}{2}$  時， $m(n) = \left\lfloor \frac{N^2 + 8N - 8}{4} \right\rfloor$ ，因此當格數為  $N$  時，任何介於 1

到  $\frac{N^2 + 8N - 8}{4}$  的數都可被寫出來。此最大下界代入 Page.18 中程式跑出的結果，可與表格中 IC 組合數之值吻合

經過以上探討可以得知，當格數為  $n$  時目前直線郵票覆蓋數的上下界範圍為：

$$\frac{n^2 + 8n - 8}{4} \leq M(n) \leq \frac{n(n+1)}{2} - 3$$

## 5 圓形圖以及一些俄羅斯方塊圖形

### 5.1 圓形

定義名詞：

$S_c$ ：圓形所排數的總和

$n_c$ ：於圓形上取之格數

$M_c(n_c)$ ：所排出的數所能連續組合出的最大值

$m_c(n_c)$ ：所排出的數所能連續組合出的最小值

**定理 1.** 圓形明顯上界為  $n_c(n_{c-1}) + 1$

證明. 當格數=  $n_c$ ，著色方式為 1 有  $n_c$  個，2 有  $n_c$  個，3 有  $n_c$  個...， $n_c - 1$  有  $n_c$  個， $n_c$  有 1 個，所求之值為  $n_c (n_c - 1) + 1$

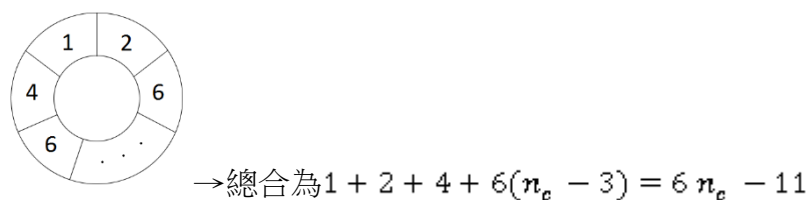
定理 2. 圓形明顯下界為  $n_c$

證明. 當格數=  $n_c$ ，著色方式為  $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, 1, 1$   
 所求之值為  $1 + 1 + 1 \dots + 1 = n_c$

我們考慮一些特殊的著色，由此我們可以得到圓形圖之下界

定理 3.  $m_c(n_c) \geq 6n_c - 11$

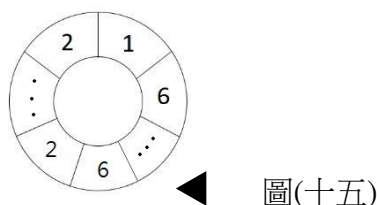
證明. 由 1 個 1，1 個 2，1 個 4，加上  $n_c - 3$  個 6 排出，如圖(十四)



▲ 圖(十四)

定理 4. 當  $n_c \geq 7$ ， $m_c(n_c) \geq \frac{n_c^2 + 2n_c - 1}{2}$

證明. 由  $k$  個 2 與  $(n_c - k - 1)$  個  $(2n_c + 2)$  及 1 個 1 排出，如圖(十五)

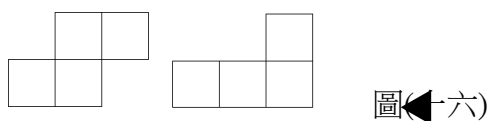


$$\begin{aligned} & \therefore 1 + 2 + \dots + 2 + (2k + 2) + \dots + (2k + 2) \\ & = -2 \left[ k^2 - (n_c - 1)k + \frac{(n_c - 1)^2}{4} \right] + 2n_c - 1 + \frac{n_c^2 - 2n_c + 1}{2} \\ & \therefore \text{當 } k = \frac{(n_c - 1)}{2} \text{ 時，有 } \mathbf{Min} = \frac{n_c^2 + 2n_c - 1}{2} \end{aligned}$$

而  $\frac{n_c^2 + 2n_c - 1}{2}$  在  $n_c \geq 7$  時會比之前算出來的  $6n_c - 11$  還大，故為較大的下界

## 5.2 俄羅斯方塊

在做研究時才發現其實很多俄羅斯方塊的圖形只是直線的變形而已，如圖(十六)



所以我們統整後討論凸形與十字兩種不屬於直線的圖形

名詞定義：

$m$ ：於圖形上其中一支所取之格數

$a_m$ ：圖  $m$

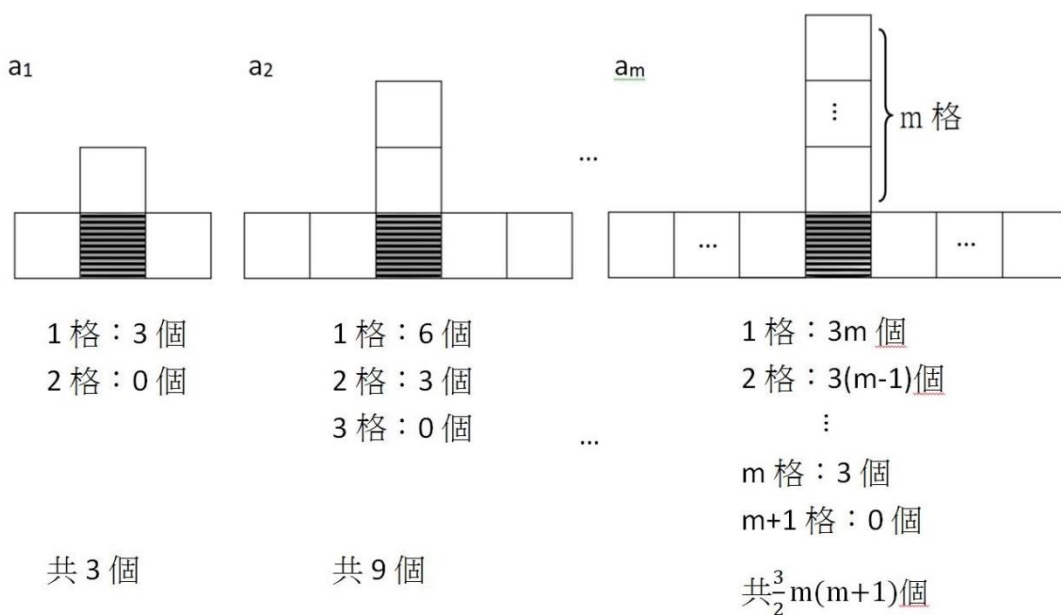
$M(a_m)$ ：所排出的數所能連續組合出的最大值

$m(a_m)$ ：所排出的數所能連續組合出的最小值

定理 1. 凸形上界為  $\frac{2m^2 + 9m + 1}{2}$

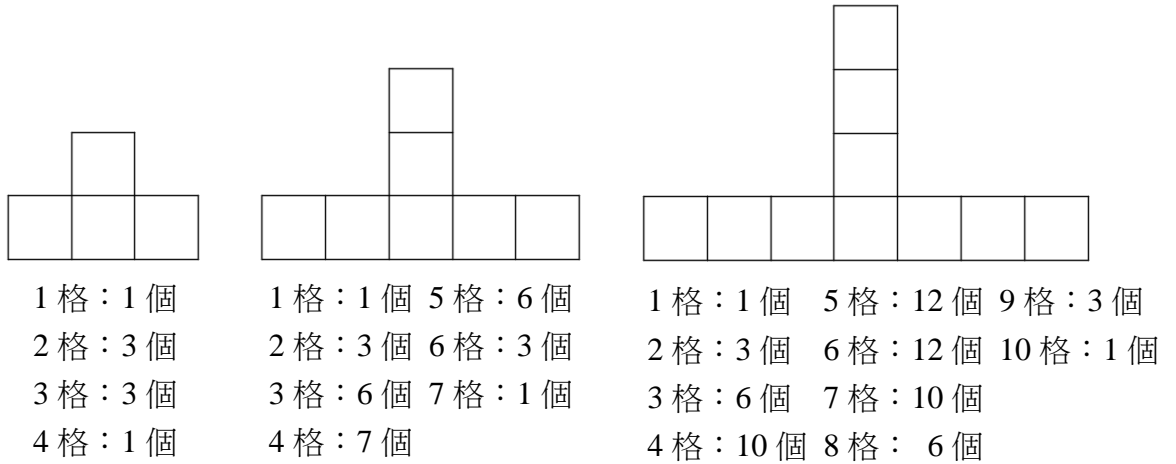
證明. 為方便求其組合數，我們將凸形分為一格中心格子與分支上  $3m$  個格子

過程中，我們可以發現未參與中心點的格子所組成的格數有規律，如圖(十七)



▲(十七)

而參與中心點的格子所組成的格數也有規律，如圖(十八)



圖▲十八)

故

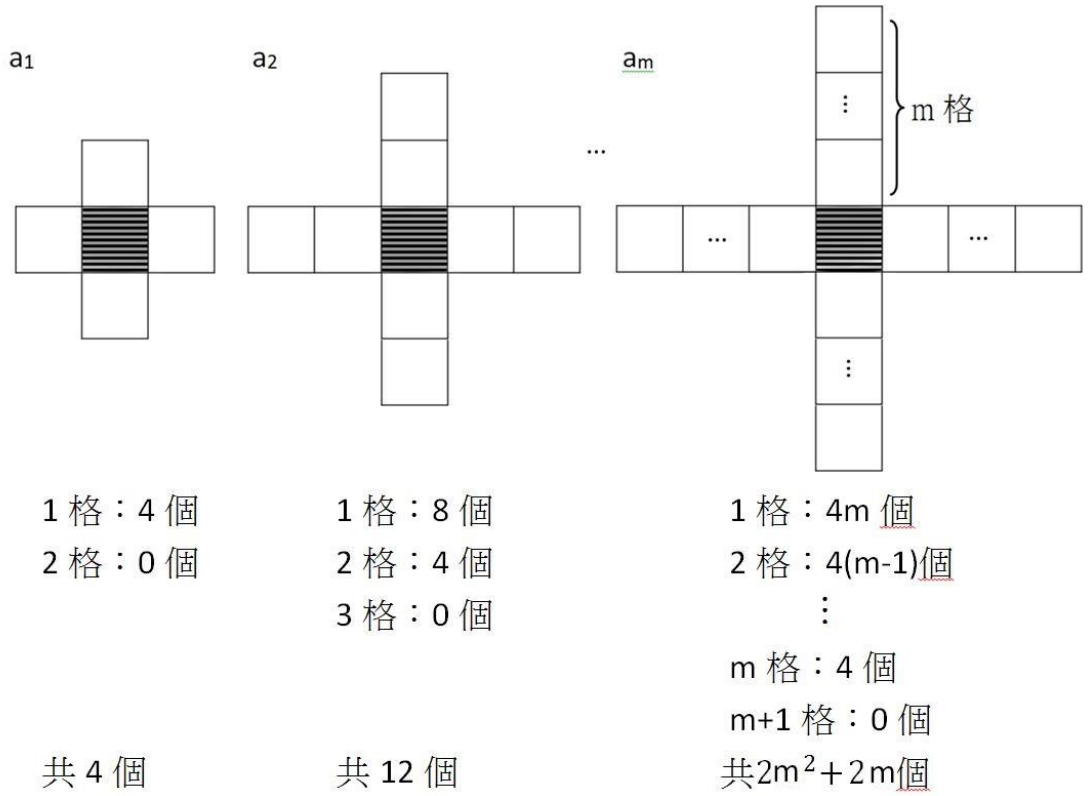
$$1(m+1) + 2m + 2(m-1) + 2(m-2) + \dots + 2 \times 2 + 2 \times 1 + 3m + \frac{3}{2}m(m+1)$$

$$= \frac{2m^3 + 9m^2 + 3m + 1}{2}$$

目前最大下界值為第 50 屆中小學科學展覽會作品「圈圈相連到天邊」中所算出來的： $m(a_m) = (m+1)^3 + 2m - 1$ (詳見[1])

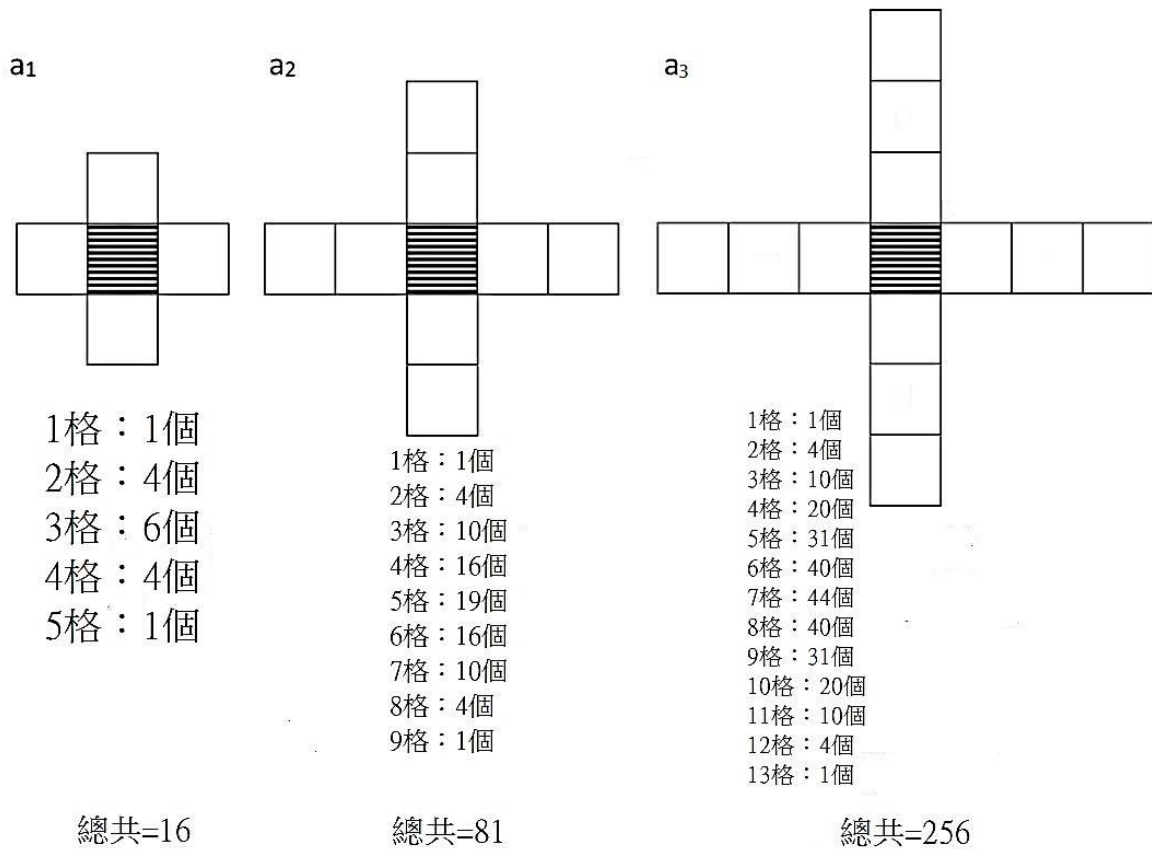
**定理 2.** 十字型的上界

**證明.** 與凸形相同，將十字分為一個中心格子與  $4m$  個分支格子，分開討論。並也找出未參與中心格子所組成的格數規律，如圖(十九)。



圖(十九)

運用著色組合，求出參與中心點的各組合個數如下圖(二十)



圖二十)

故以此推論 $a_m$ 的總和 $M(a_m)$ 應為 $[(m + 1)^2]^2$

→將參與中心點與未參與中心點之組合個數相加

→ $[(m + 1)^2]^2 + 2n^2 + 2n \rightarrow$

$$M(a_m) = m^4 + 4m^3 + 8m^2 + 6m + 1$$

目前最大下界值為第 50 屆中小學科學展覽會作品「圈圈相連到天邊」中所算出來的： $m(a_m) = (m + 1)^4 + 2m - 1$ (詳見[1])

## 6 討論與結論

### 6.1 動手做做看

在探討直線 IC 著色時，利用動手著色及程式輔助可得以下結果：

$$n=1 \quad S=1 \rightarrow (1) \rightarrow M(1)=1$$

$$n=2 \quad S=2 \rightarrow (1,1), S=3 \rightarrow (1,2) \rightarrow M(2)=3$$

$$n=3 \quad S=3 \rightarrow (1,1,1), S=4 \rightarrow (1,1,2), S=5 \rightarrow (1,2,2), S=6 \rightarrow (1,3,2) \rightarrow M(3)=6$$

$$n=4 \quad S=4 \rightarrow (1,1,1,1), S=5 \rightarrow (1,1,1,2), S=6 \rightarrow (1,1,1,3), (1,1,2,2)$$

$$S=7 \rightarrow (1,1,1,4), (1,1,2,3), (1,2,2,2), S=8 \rightarrow (1,2,4,1), (1,1,3,3), (1,3,2,2) S=9 \rightarrow$$

(1,3,3,2) → M(4)=9

以上 M' 和 M 都相同。


由指導教授提供的電腦程式跑的結果，得到

n	M'(n)	M(n)
5	13 [2,2,3,5,1]	同左
6	17 [2,2,2,3,7,1]	18 [6,3,1,7,5,2]
7	23 [2,3,2,6,6,3,1]	24 [8,7,2,3,1,10,8]
8	29 [1,2,3,7,7,4,4,1]	同左
9	36 [1,2,3,7,7,7,4,4,1]	37 [7,15,5,1,3,8,2,16,7]
10	43 [1,2,3,7,7,7,7,4,4,1]	45 [28,5,2,8,6,11,9,3,1,18]

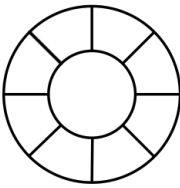
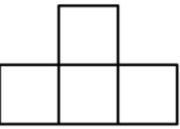
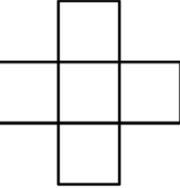
其中 n=5,6,7,8 的 M(n) 結果與 Penrice 在 1995 的論文的數據吻合 (詳見[2])，其他結果我們則尚未在其他資料中發現。由上表可推知郵票覆蓋數一定大於等於 IC 數，因 IC 數的限制較郵票覆蓋數為大。而至 n=11 以後的著色組合，藉由程式計算需花上超過一天的時間還未能跑出結果，因此當 n ≤ 10 的範圍在有限時間可用電腦跑出正確答案。

經由上述一連串的研討，我們可以發現結果如表(一)：

表(一)

圖示	原始上界	改進上界	原始下界	改進下界
	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\leq \frac{n(n+1)}{2} - 2$	n	$\geq \frac{n^2+6n+13}{4}$



	$n_c(n_c - 1) + 1$	尚未改進	$n_c$	當 $7 \geq n$ 時 $\geq 6n - 11$ 當 $n \geq 7$ 時 $\geq \frac{n_c^2 + 2n_c - 1}{2}$
	$\frac{2m^3 + 9m^2 + 3m + 1}{2}$	尚未改進	$1 + 3m$	$\geq (m + 1)^3 + 2m - 1$
	$m^4 + 4m^3 + 8m^2 + 6m + 1$ 尚未改進	尚未改進	$1 + 4m$	$\geq (m + 1)^4 + 2m - 1$

## 7 討論與結論

上下界之範圍縮小：往後可繼續將上界變小下界變大，使連續組合數的範圍縮小。

二維圖形之連續組合數的延伸：目前我們只針對二維圖形(直線、圓形及俄羅斯方塊)做研究，並以二維圖形為基礎，逐步研究在三維空間中所著色出的連續組合數。

先前的科展作品，如「圈圈相連到天邊」，大多停留在下界，經過這次的科展研究，我們除了改進下界值，更增添了上界，並將研究擴展到更多圖形，使其有較精確的範圍。從一開始較簡單也較麻煩的窮舉法推導並縮小了直線的上界值，進而使用著色與些微邏輯推理使證明與研究更深入。發現這些之後朝趨於複雜的圖形做了探討，雖然並未得出完美符合預期的成果，但與 2004 年「IC-COLORINGS

AND IC-INDICES OF GRAPHS」學術論文比較，我們的直線下界值  $\frac{n^2 + 6n + 13}{4}$  改進

了此論文的下界  $\frac{n^2 + 6n - 3}{4}$ 。本次科展的結果給我們的不僅僅是題目侷限的紙上內容，還點綴了其他本該不會發現的插曲，更說明了數學的延展性與奧妙！期望能繼續延伸本次內容，並能用簡單且高效率的方法解決問題！

## 參考資料

- [1] 鄭晏奇、楊翔雲、黃紹宸、李育霖，圈圈相連到天邊，中華民國第 50 屆中小學科學展覽會，2013。  
<http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/50/pdf/040413.pdf>
- [2] Ebrahim Salehi, Sin-Min Lee, Mahdad Khatirinejad, IC-Colorings and IC-Indices of graphs, *Discrete Mathematics*, 299 (2005), 297-310.
- [3] 林耀仁，圖的 IC-著色之研究，大同大學應用數學研究所碩士論文，中華民國九十七年六月。  
Yao-Ren Lin, A Study of IC-Coloring of Graphs, Thesis for Master of Science, Department of Applied Mathematics, Tatung University, June 2008.
- [4] Douglas B. West, Introduction to Graph Theory, Second Edition, Prentice Hall 2001.
- [5] Chin-Lin and Shiue and Hung-Lin Fu, The IC-Indices of Complete Bipartite Graphs, *Electronic Journal of Combinatorics*, 15 (2008) R43.
- [6] 周俊全，郵票問題的研究，交通大學應用數學研究所碩士論文，中華民國九十六年六月。  
Chun-Chuan Chou, A Study Of Stamp problem, Thesis for Master of Science, Department of Applied Mathematics, Hsinchu University, June 2007.